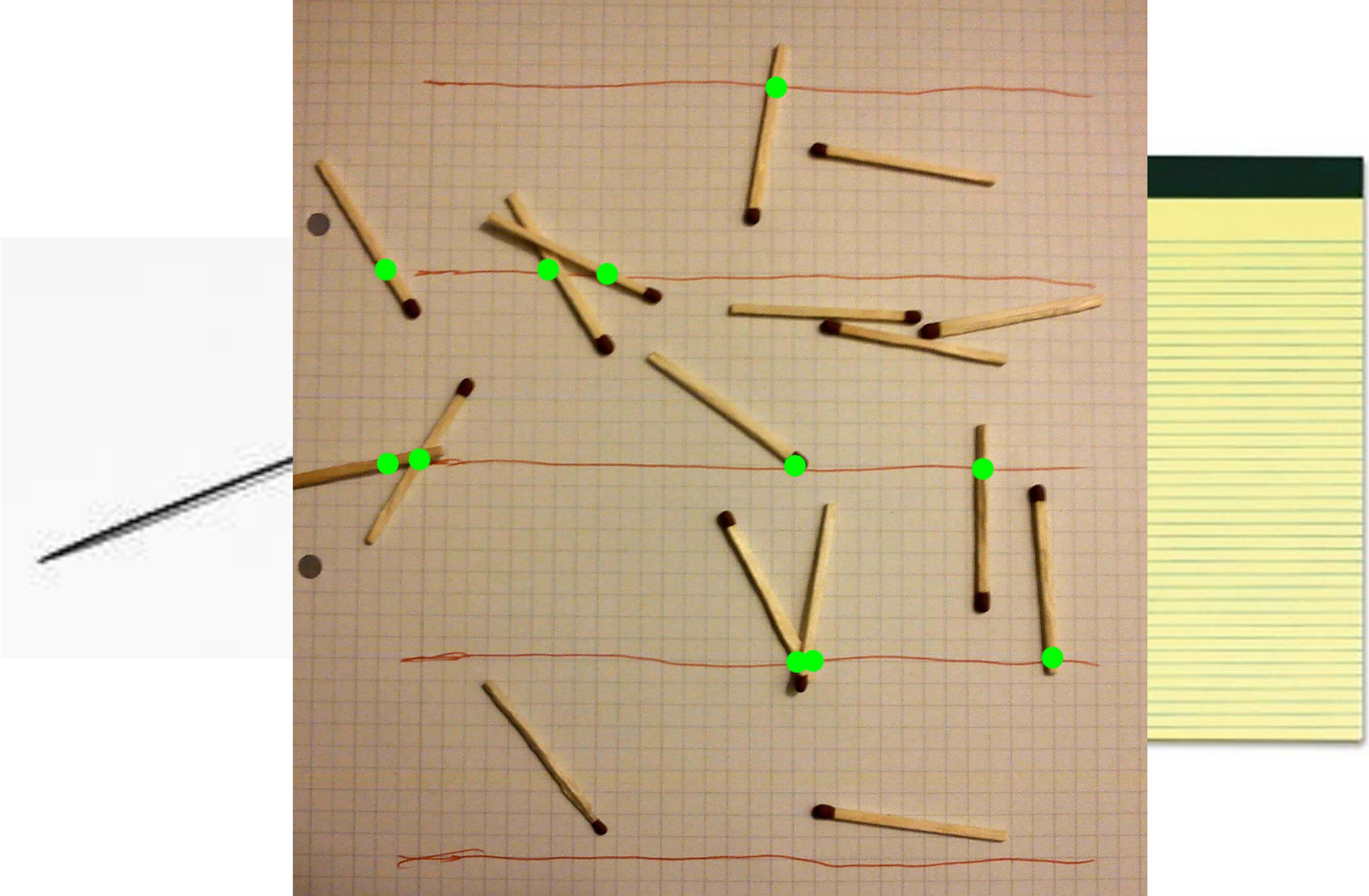
המחט של בופון

שקד בדר

מחט (שם עצם, נקבה)

דומם



מה תוחלת מספר הפגיעות של המחט בקווים?

מושגים בסיסיים:

מרחב הסתברות: $(\Omega, \mathbb{P})$, $\overset{\text{מידה}}{\mathbb{P}} : \Omega \to [0,1]$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

משתנה מקרי: $X : \Omega \to \mathbb{R}$

התוחלת של X - הממוצע המשוקלל לפי המידה של X.

$$E(X) = \int_{\Omega} X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega).$$

מה תוחלת מספר הפגיעות של המחט בשורה?

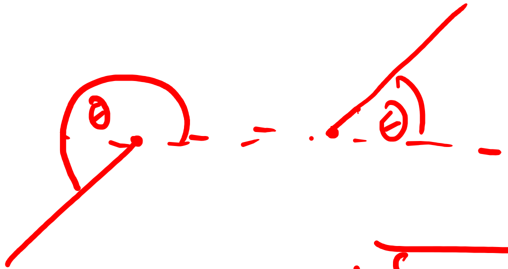
$\Omega = \{$ כל הדרכים של המחט ליפול $\} \overset{?}{=} \{ f:[0,\ell] \to \mathbb{R}^2$ איזומטריה $\}$ (ℓ - אורך המחט)

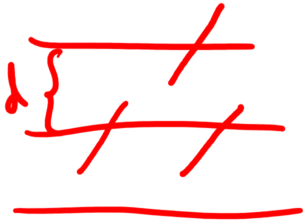
$\cong \mathbb{R}^2 \times [0,2\pi)$

אצלנו:

מ"ה: אוניפורמית על Ω $\mathbb{P} =$

$X(\omega) =$ מספר הקווים שהמחט חוצה אם נפלה בצורה ω.

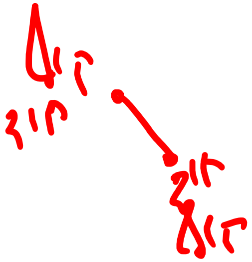




סימטריות של הבעיה

1) קואורדינטת x מיותרת ולכן $\Omega \overset{?}{=} \mathbb{R} \times [0,2\pi)$.

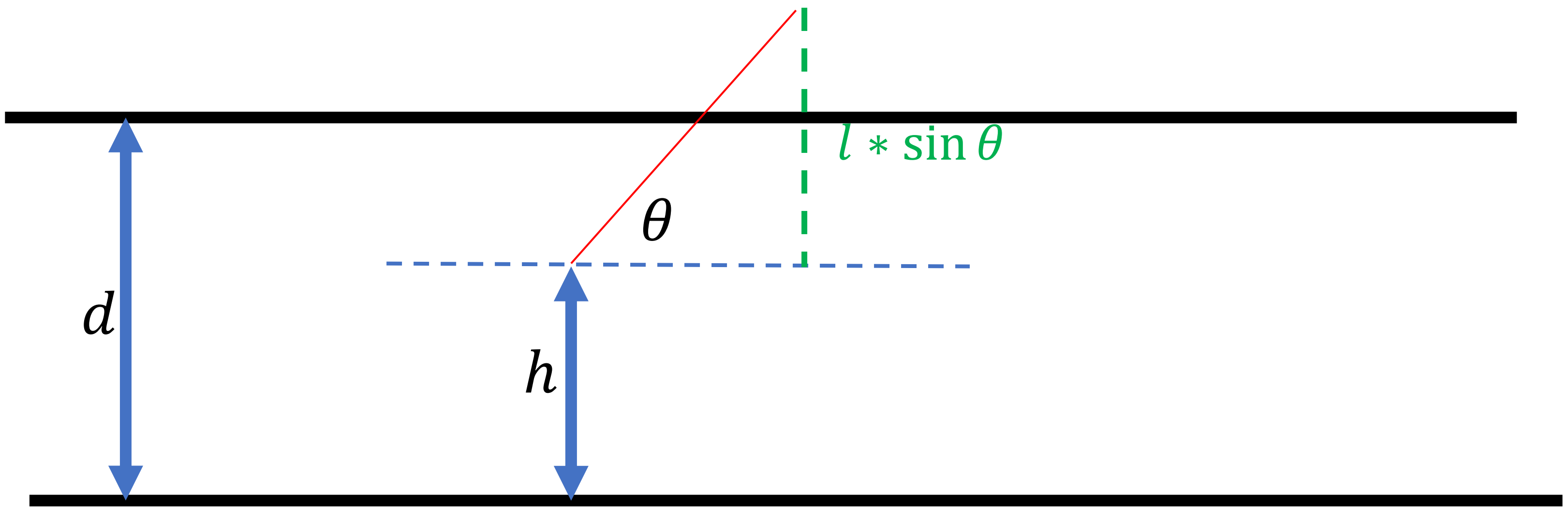
2) $\Omega \overset{?}{=} \mathbb{R}/d\mathbb{Z} \times [0,2\pi)$, $\mathbb{R}/d\mathbb{Z} = [0,d)$



3) סיבוב בזווית π לא משנה ולכן $\Omega = [0,d) \times [0,\pi)$.

$\mathbb{P} = \frac{\mu}{\mu(\Omega)} = \frac{\mu}{d\pi}$

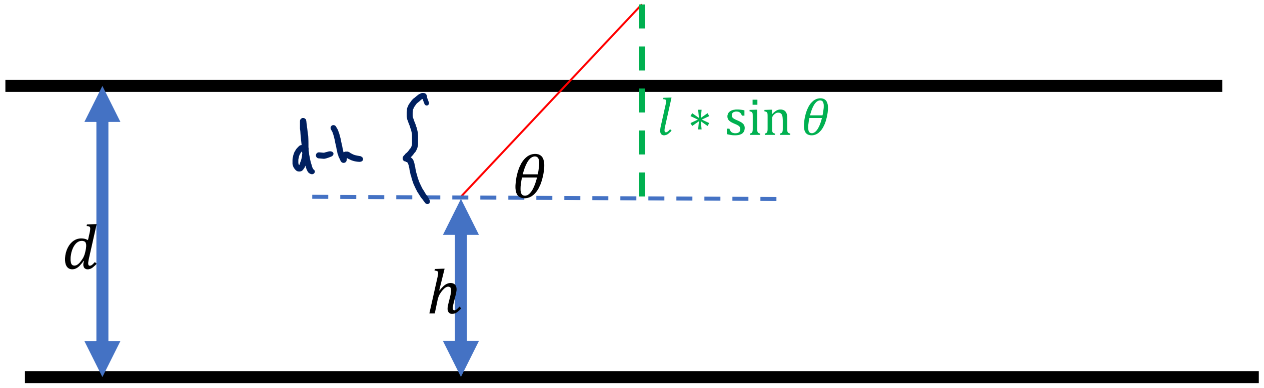
מה תוחלת מספר הפגיעות של המחט בשורה?



אורך המחט: l
מרחק בין השורות: d
הנחה נוספת: $l < d$.

$[0, d] \times [0, \pi)$

מה תוחלת מספר הפגיעות של המחט בשורה?



אורך המחט: l

מרחק בין השורות: d

הנחה נוספת: $l < d$.

הגובה והזווית בלתי תלויים ומחט חוצה את הקו אם ורק אם:

$$A = \{(h,\theta) \mid l * \sin\theta \geq d - h\}$$

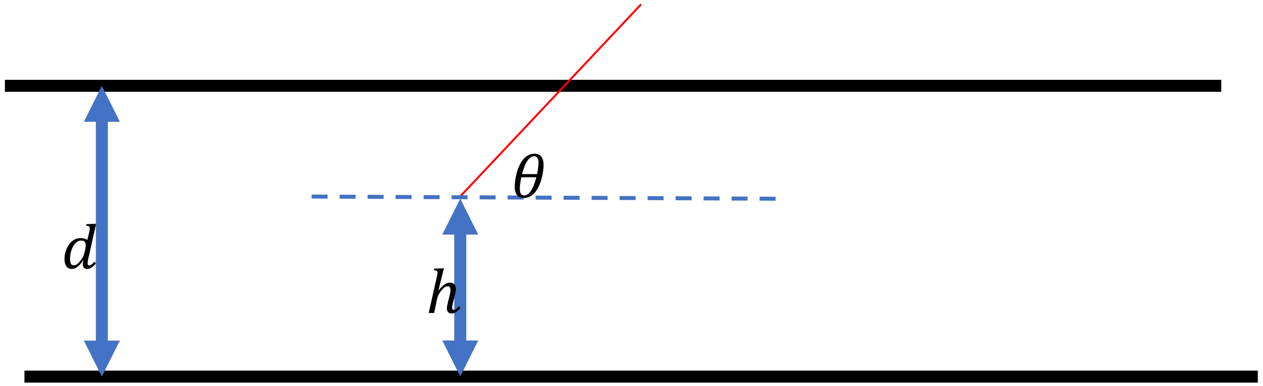
$$\mathbb{1}_A = X^{(h,\theta)}(\omega) = \begin{cases} 1 & l\sin\theta \geq d-h \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$E(X) = \mathbb{P}(A) = \frac{\mu(A)}{d\pi}$$

$$\mu(A) = \int_0^\pi \int_{d-l\sin\theta}^{d} dh\, d\theta = \int_0^\pi \cancel{d} - (\cancel{d} - l\sin\theta)\, d\theta = \int_0^\pi l\sin\theta\, d\theta = l(\underbrace{-\cos\pi}_{1} - -\underbrace{\cos 0}_{1}) = 2l$$

לא נשכח לחלק במידה של מרחב ההסתברות, שהיא $d * \pi$.

מה תוחלת מספר הפגיעות של המחט בשורה?



אורך המחט: l
מרחק בין השורות: d
הנחה נוספת: $l < d$.

סה"כ התוחלת היא

$$\frac{2l}{d\pi}$$

איך אפשר לקרב את פאי ואיך אפשר לרמות?

מסקנה מהדיון הקודם: אם נעשה הרבה ניסויים עם מחט באורך קבוע ושורות באורך קבוע נוכל להסתכל על תוצאות הניסויים כדי לקרב את פאי:

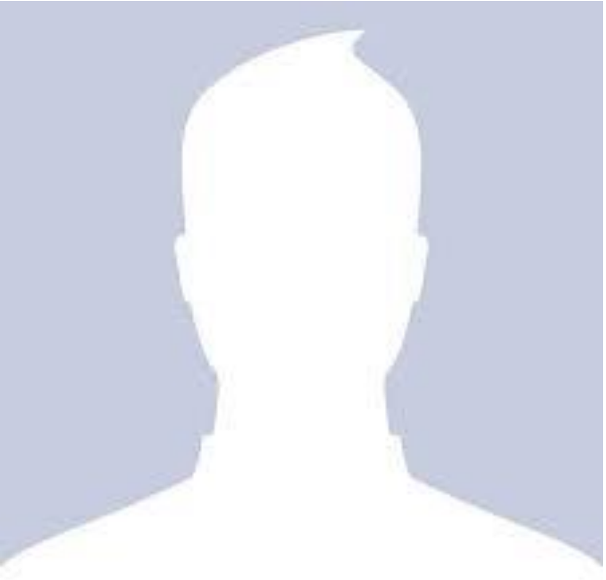
$$\frac{\text{פגיעות}}{\text{נסיונות}} \approx \frac{2l}{d\pi}$$

הקונספט הזה של לקרב בעזרת ניסויים נקרא "שיטת מונטה קרלו".

https://mste.illinois.edu/activity/buffon/

הסיבה לשם – קזינו מונטה קרלו

מריו לזאריני



ה"ניסוי" של לזאריני:

טוען שקיבל $\pi \approx \frac{355}{113} = 3.14159292$

כדי לקבל קירוב כזה טוב צריך

$$\frac{355}{113} \quad \frac{113}{355} \quad \cancel{\frac{355}{113}} = \frac{2l}{d} * \frac{\text{נסיונות}}{\text{פגיעות}}$$

זאת אומרת

$$\text{פגיעות} = \frac{\text{נסיונות} * 113}{355} * \frac{2l}{d}$$

רוצים שהמכנה יהיה מינימלי ו $355 = 71 * 5$
אז אפשר לבחור $l = 5$.

הנחנו $d > l$, אבל עדיין רוצים מכנה מינימלי
אז נבחר $d = 6$.

אבל זה מה שלזאריני עשה! הוא בחר מחט
ככה ש$\frac{l}{d} = \frac{5}{6}$

ה"ניסוי" של לזאריני:

טוען שקיבל $\pi \approx \frac{355}{113} = 3.14159292$

עכשיו קיבלנו:

$$\text{פגיעות} = \frac{\text{נסיונות} * 113}{71 * 3} = \frac{\text{נסיונות} * 113}{213}$$

כדי להשיג קירוב טוב לפאי כל שצריך הוא
להטיל את המחט 213 פעמים שוב ושוב
ולחכות לתוצאות טובות.
זאת כמובן רמאות.

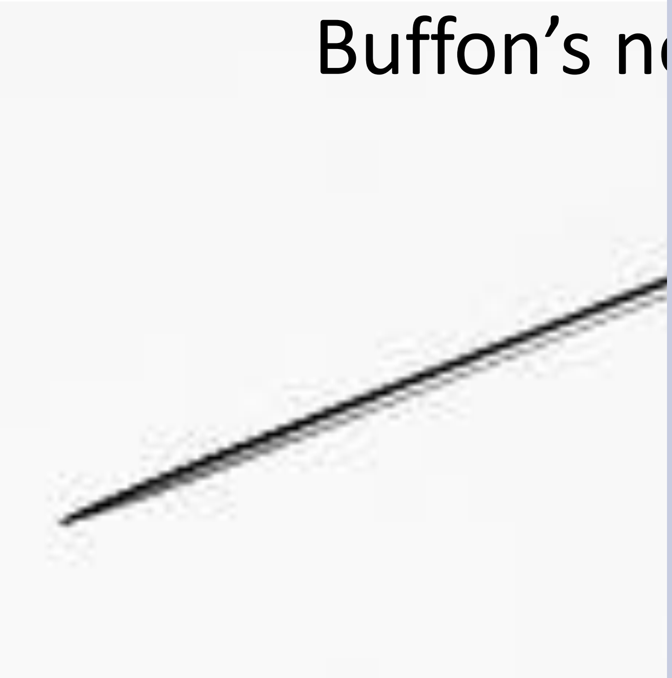
נחשו כמה פעמים לזאריני הטיל את המחט?

$$3048 = 213 * 16$$

פתרון יפה לבעיה

ז'וזף-אמיל ברביאר

Buffon’s n



1839-1889

Buffon’s noodle

הבחנות – שכחו מכל מה שעשינו עד עכשיו

• תוחלת היא לינארית - $E(2X) = 2E(X)$

• תוחלת היא לינארית גם עבור משתנים מקריים תלוים

$E\left(\text{מספר הפגיעות}\ \text{מפגש}\ \text{בקוים}\ l\right) = 2E(X)$

מסקנה: אם נסמן X_l את המשתנה המקרי שמתאים למחט באורך l אז $\mathbb{E}(X_l) = l\mathbb{E}(X_1)$ במילים אחרות, התוחלת תלויה לינארית באורך.

הוכחה:

$2E(X_{\frac{1}{2}}) = E\left(\text{מספר הפגיעות}\ \text{מפגש בקוים}\ l\right) = E(X_1)$

$nE(X_{\frac{1}{n}}) = E(X_1) \Longrightarrow \forall n\ E(X_{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}E(X_1) \Longrightarrow \forall q \in \mathbb{Q}\ E(X_q) = qE(X_1)$

$\overset{\text{רציפות}}{\Longrightarrow} \forall r \in \mathbb{R}\quad E(X_r) = rE(X_1)$

המשך הבחנות

מסקנה: התוחלת של מספר הפעמים שעקום לינארי למקוטעין באורך l יפגע בקו שווה $\mathbb{E}(X_l)$.

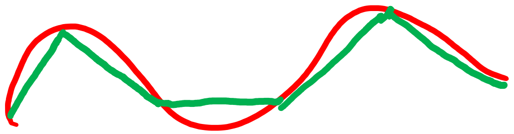
הוכחה:

$\sum l_i = l$

$$\mathbb{E}\left(\begin{matrix}\text{מספר הפעמים} \\ \text{שעקום} \\ \text{יפגע בקוים}\end{matrix}\right) = \sum_{i=1}^{5} \mathbb{E}(X_{l_i})$$

$$= \sum_{i=1}^{5} l_i \mathbb{E}(X_1) = l\,\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_l)$$

מסקנה: זה נכון גם לעקום רציף כללי.



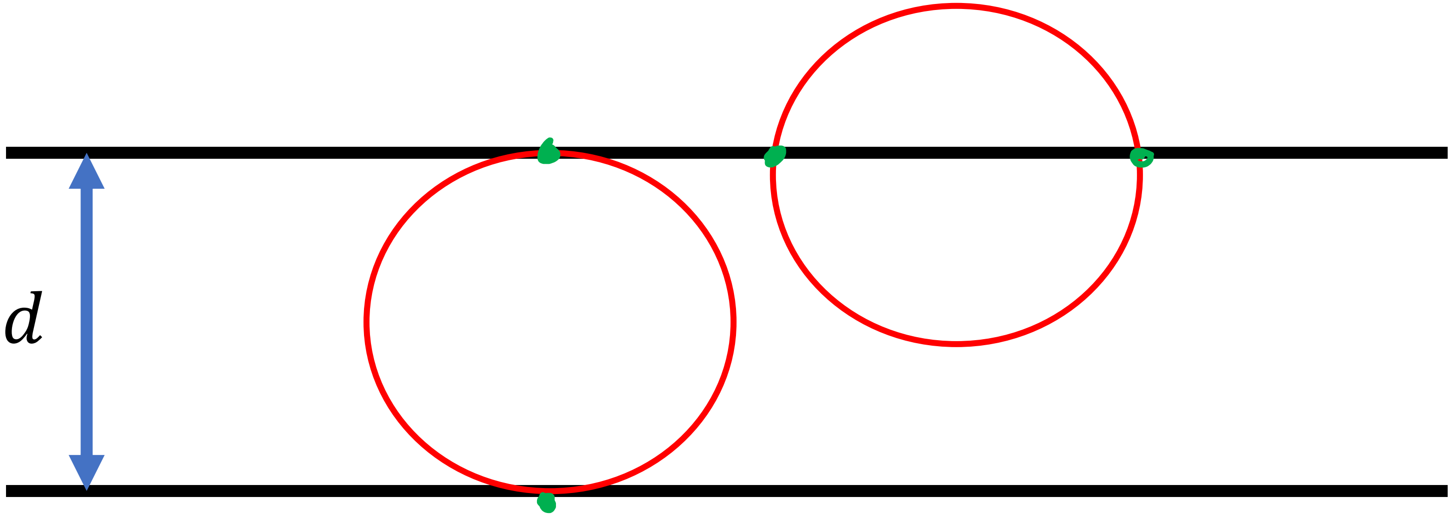
$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_l)$

שאלה חדשה: זורקים עקום כלשהו על דף שורות, מה תוחלת מספר הפגיעות בקווים?

תשובה: בדיוק התוחלת של מחט באותו אורך

איזה עקום נרצה לזרוק?

עבור איזה עקום אנחנו יודעים בדיוק מה התוחלת?



מה תוחלת הפגיעות?

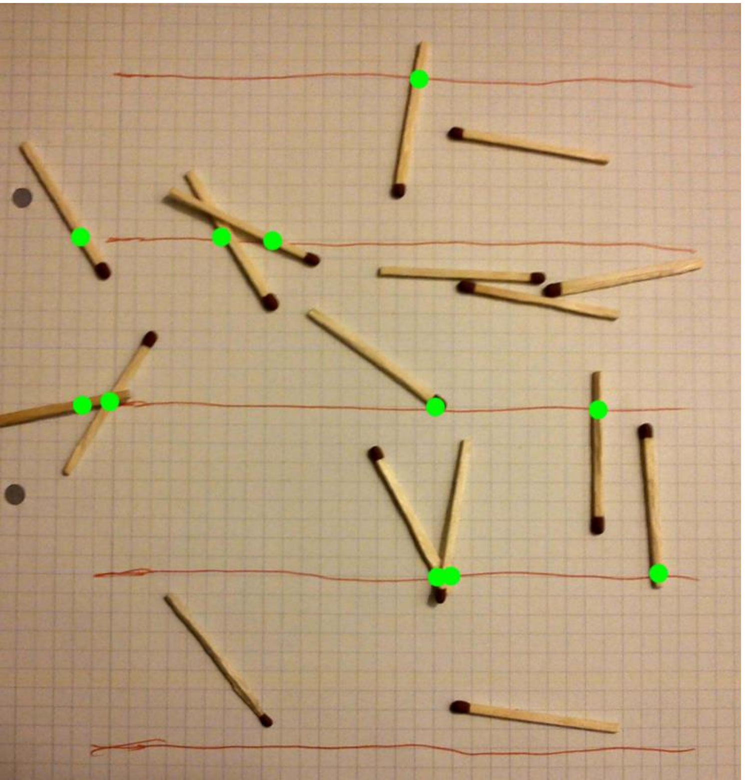
$$\mathbb{E}(\mathit{curve\ of\ length\ d\pi}) = 2$$

$$\mathbb{E}(X_\ell) = \ell\, \mathbb{E}(X_1)$$

$$2 = \mathbb{E}(X_{d\pi}) = d\pi\, \mathbb{E}(X_1) \Longrightarrow \mathbb{E}(X_1) = \frac{2}{d\pi}$$

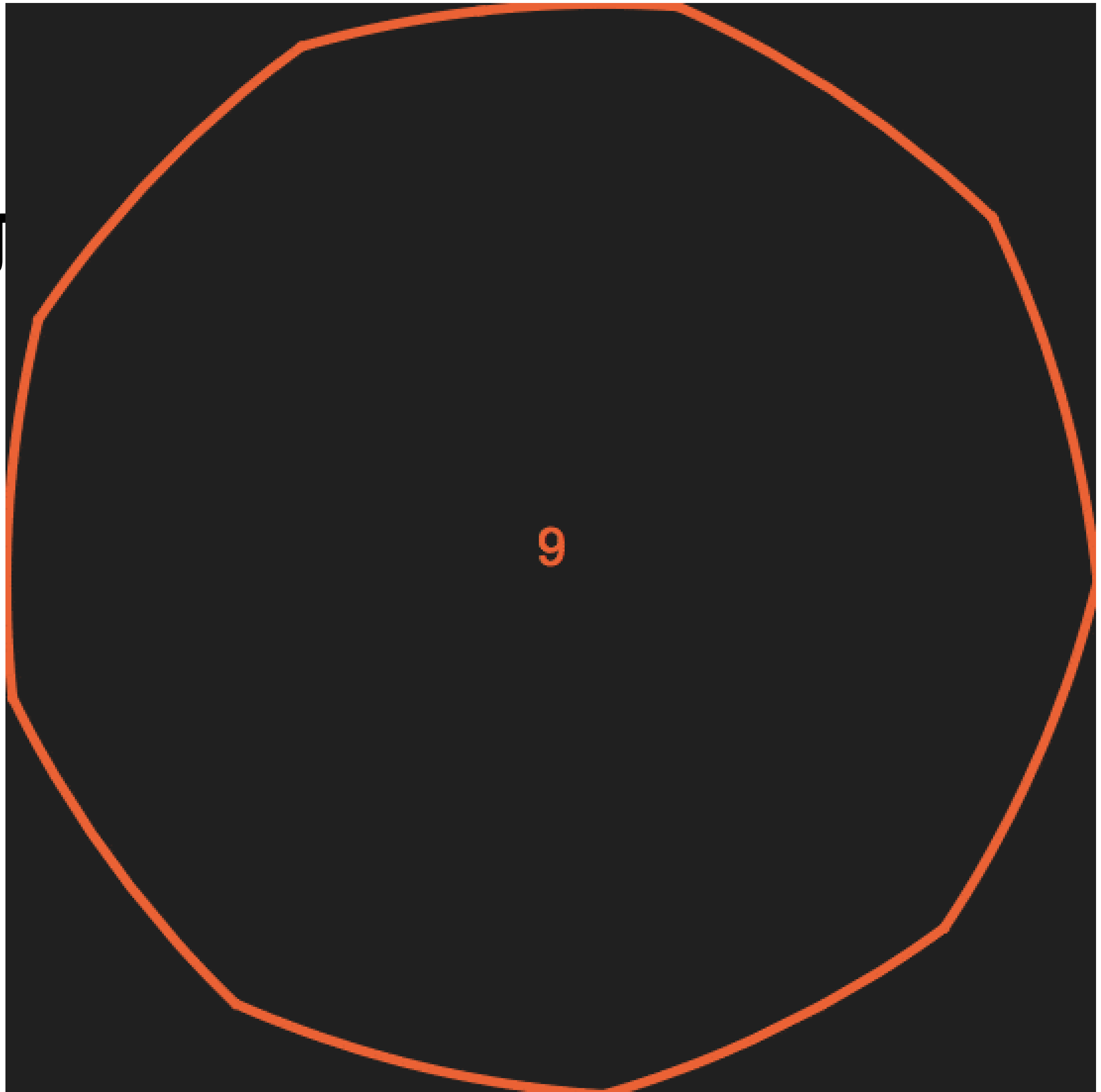
$$\Downarrow$$

$$\mathbb{E}(X_\ell) = \frac{2\ell}{d\pi}$$



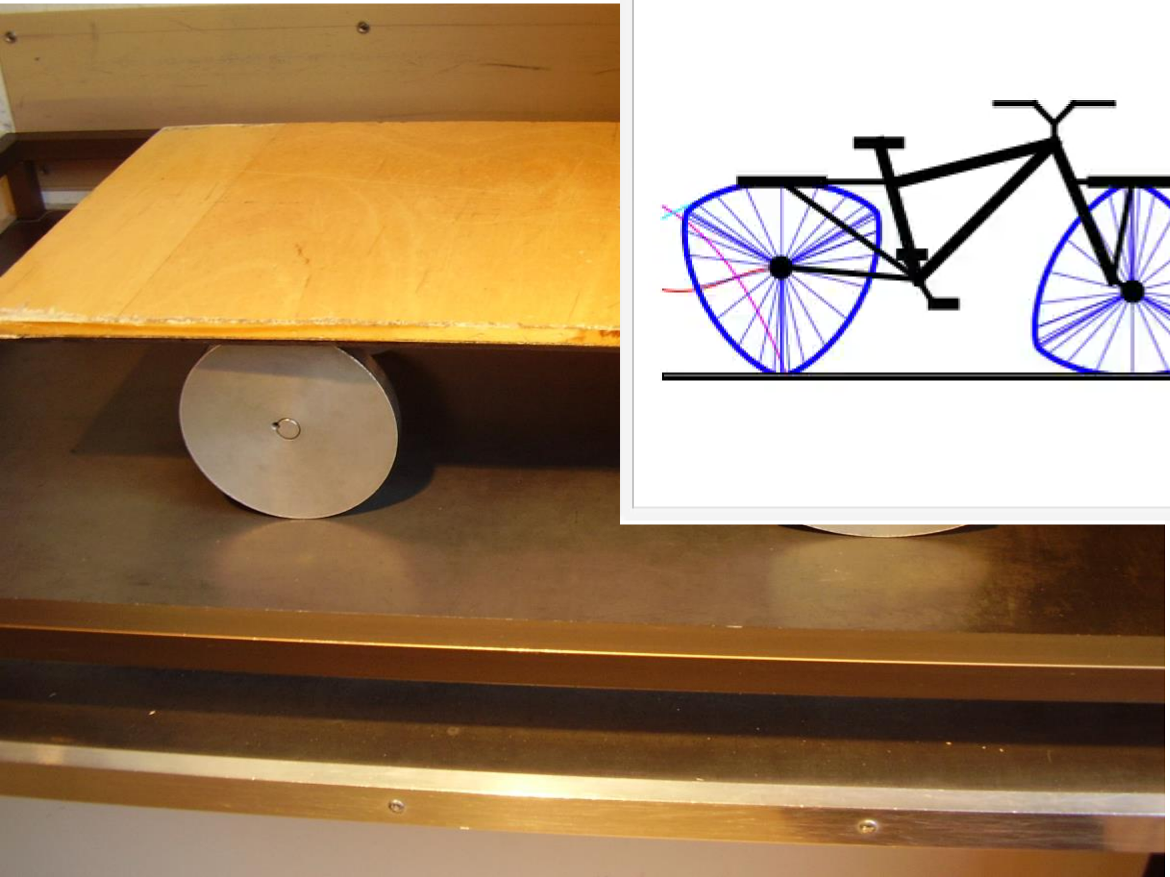
האם ישנן צורות נוספות שעבור
מספר הפגיעות קבוע?

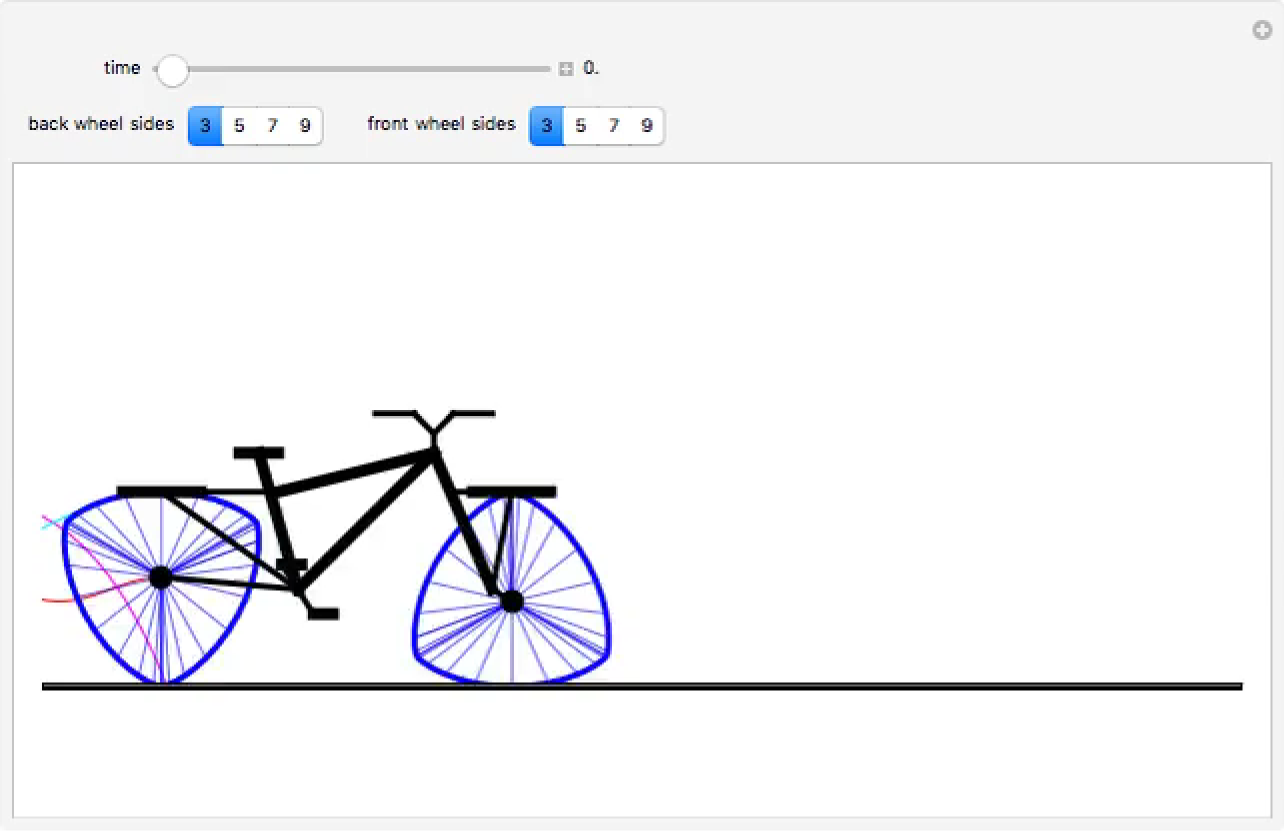
תכונה צריך?

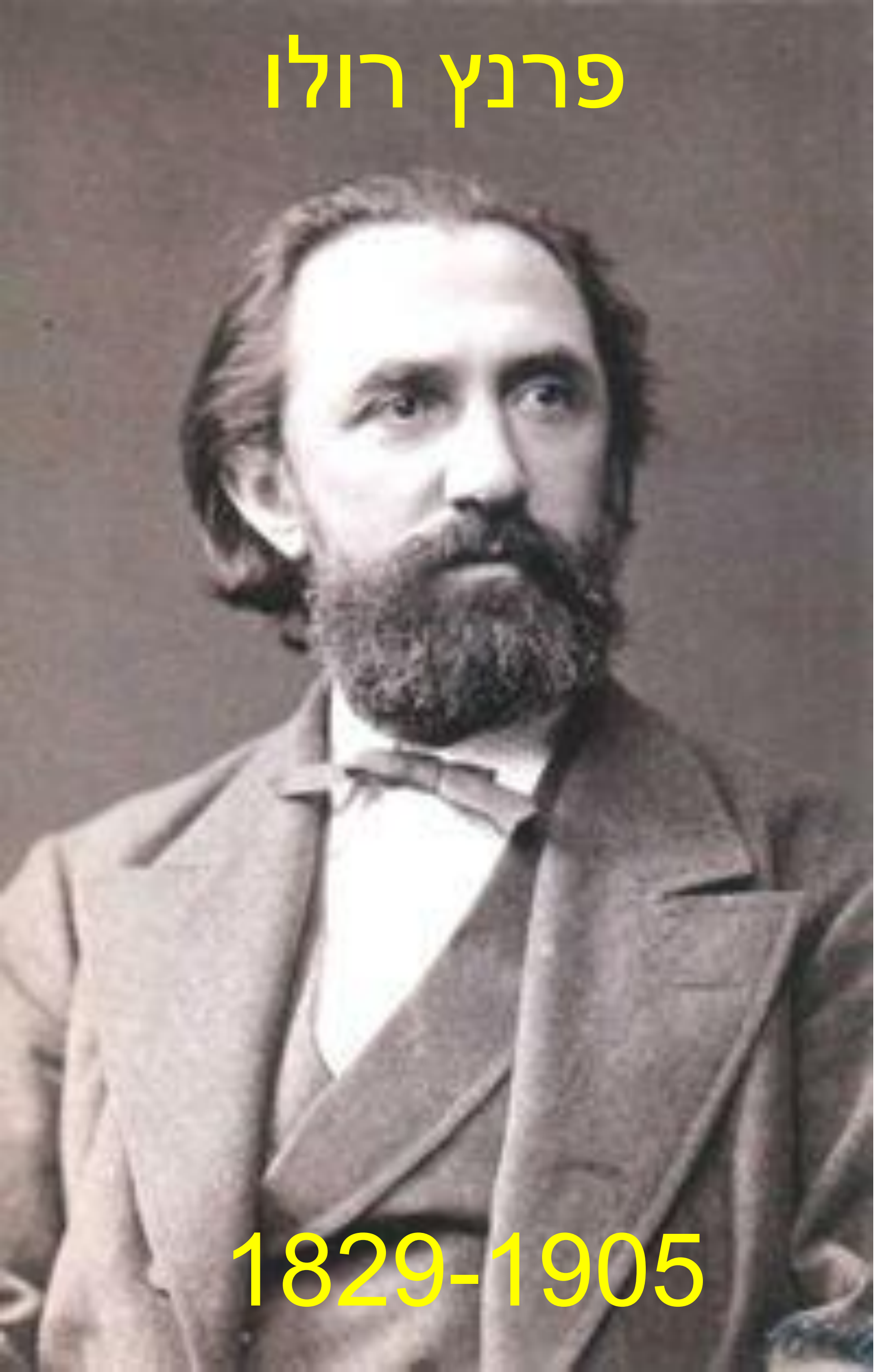



ביוב
D400 EN 124 SII
DS TLF CHINA
manhole.co.il

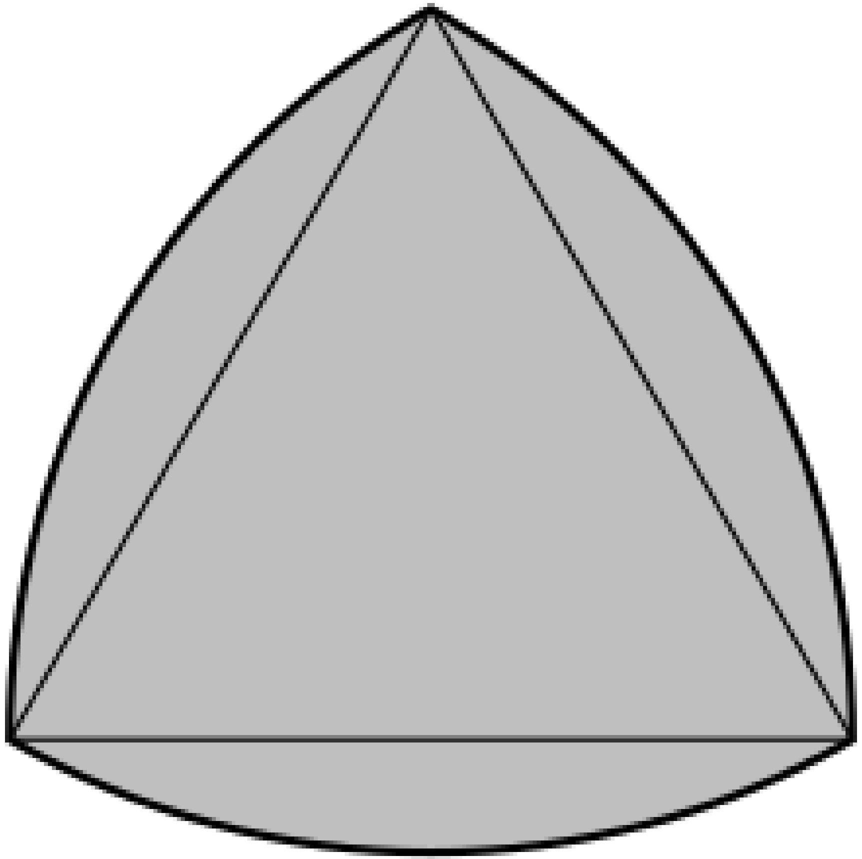
יכולים לשמש כגלגלים



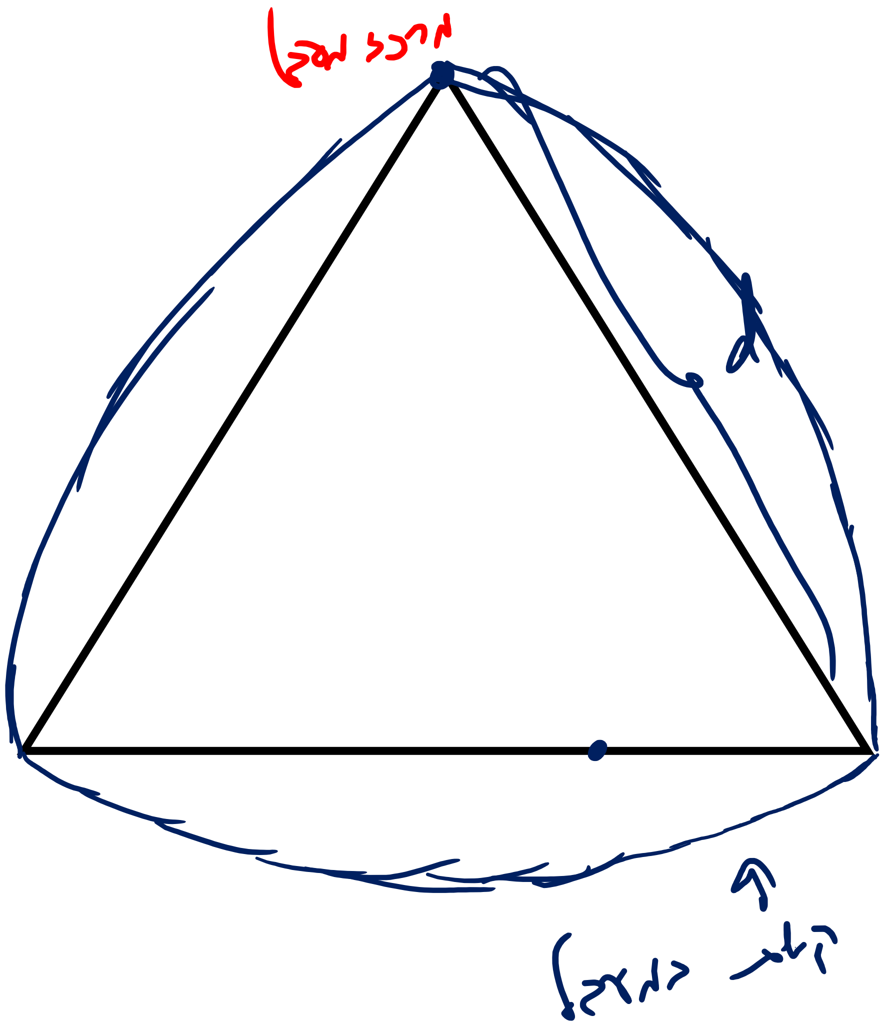




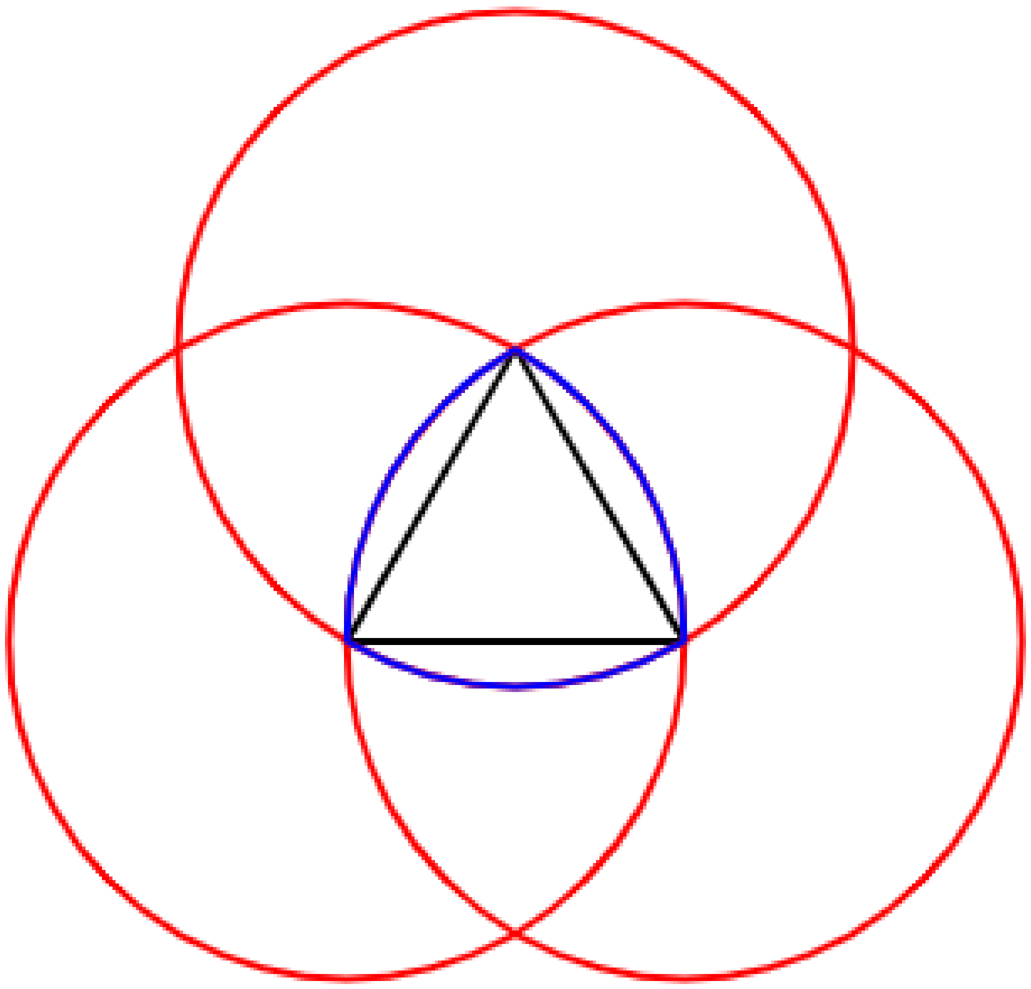
משולש רולו



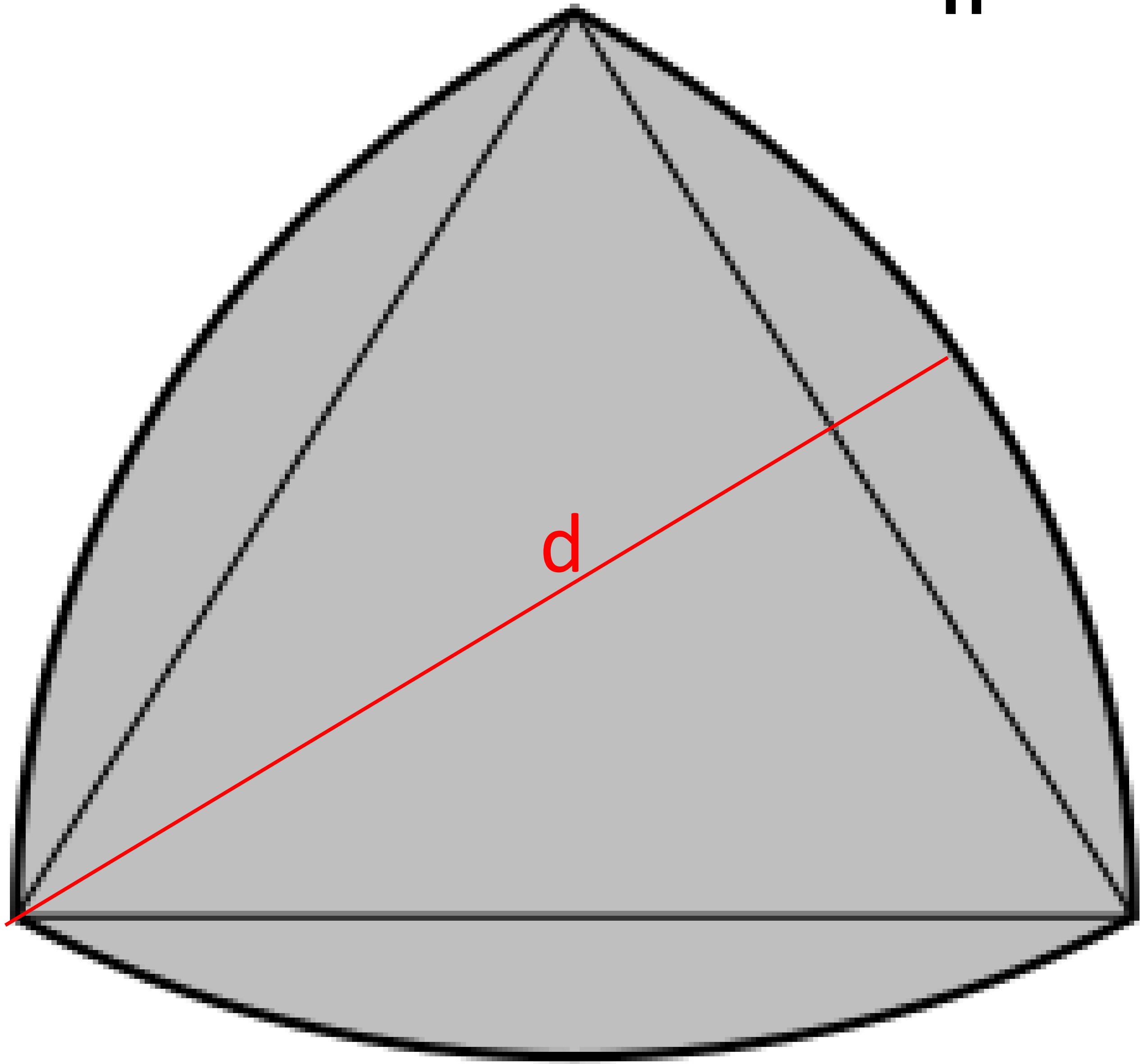
משולש רולו



משולש רולו



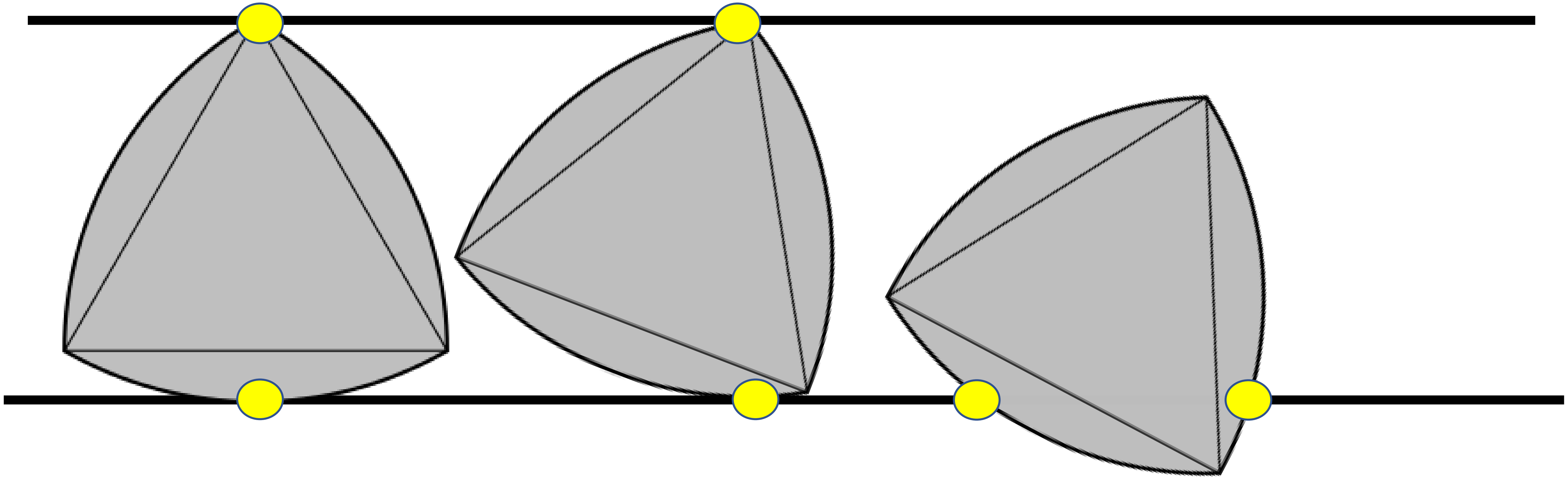
בהינתן הקוטר d מה ההיקף של משולש רולו?



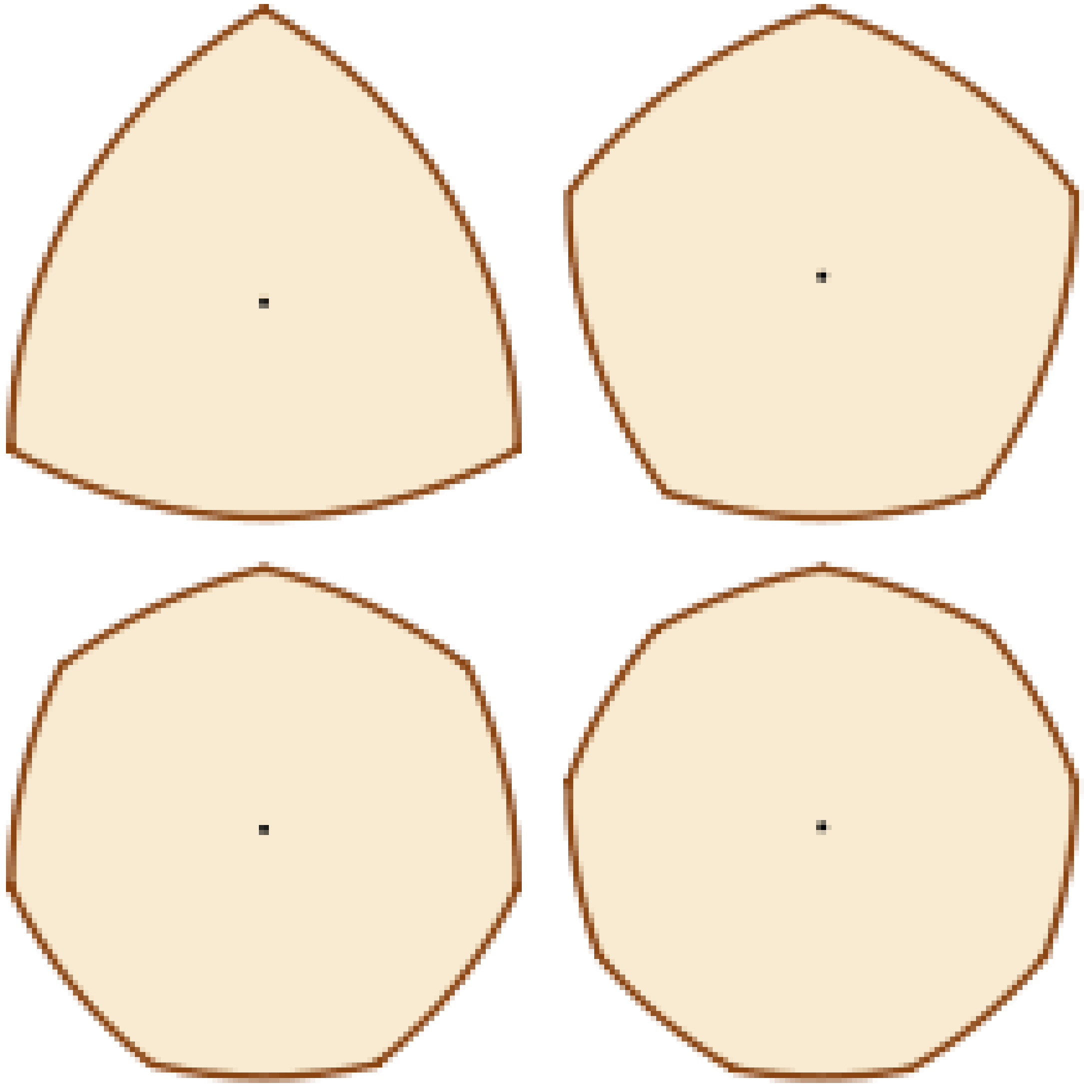
אורך כל קשת הוא אורך של שישית מעגל ברדיוס d.

סה"כ חצי מעגל שזה בדיוק πd.

אבל ידענו את זה כבר:



אז לכל הצורות שוות הקוטר, ההיקף שלהן הוא הקוטר כפול פאי.



קירובים של פאי על ידי שברים

שברים משולבים

הגדרה: שבר משולב הוא מספר מהצורה:

כאשר a_0 שלם והאחרים טבעיים.

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

אנחנו מרשים לשבר המשולב להיות אינסופי (כרגע באופן פורמלי).

טענה: ניתן לייצג מספר ממשי על ידי שבר משולב סופי אם ורק אם הוא רציונלי. במקרה זה הייצוג יהיה יחיד.

טענה: ניתן לייצג מספר ממשי על ידי שבר משולב סופי אם ורק אם הוא רציונלי. במקרה זה קיימים בדיוק שני יצוגים.

הוכחה על ידי דוגמא:

$$\frac{47}{69} = 0 + \frac{1}{\frac{69}{47}} = 0 + \frac{1}{1+\frac{22}{47}} = 0 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{3}{22}}}$$

$$= 0 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{7+\frac{1}{3}}}}$$

"יחידות"

$a_0=(a_0-1)+\frac{1}{1}$, כמובן אבל

$[a_0:\dots:a_n]$

$=[a_0:\dots:a_n-1:1]$

לכל מס' רציונלי יש "ייצוג יחיד" כשבר משולב $[a_0:\dots:a_n]$ כך ש $a_n\neq 1$.

$a_n\neq 1$

<u>הערה:</u>

באינדוקציה: ~~על~~ אורך ייצוג מינימלי אחד. <u>בסיס:</u>

$a_0+\underbrace{\frac{1}{\ddots}}_{<1}$

צעד: $a_0=\lfloor q\rfloor$ ולכן

$q=a_0+\frac{1}{\ddots}$

$\frac{1}{q-\lfloor q\rfloor}$ $\Leftarrow$ "ייצוג באורך קצר יותר" יחיד בהנחה.

משפט: שברים משולבים נותנים את הקירובים הכי טובים.

נגדיר קירוב טוב של x הוא מספר רציונלי $\frac{a}{b}$ כך שלכל $d \leq b$ ולכל c מתקיים

$$|\frac{a}{b} - x| \leq |\frac{c}{d} - x|$$

המשפט אומר שהשברים שאנחנו מקבלים בייצוג של מספר כשבר משולבים הם קירובים טובים של המספר.

יתרה מזאת קצב ההתכנסות של השברים המשולבים הוא מאד מהיר.

$$3.14159265 = \pi = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\;}}}}}}$$

שבר משולב	עשרוני